

# Analyse stationärer Zeitreihen

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Stationäre zufällige Prozesse</b>	<b>4</b>
2.1	Zufällige (oder: stochastische) Prozesse. Grundbegriffe . . . . .	4
2.2	Stationarität . . . . .	5
2.3	Beseitigung von Trend und saisonaler Komponente . . . . .	8
2.4	Autokovarianzfunktion eines stationären Prozesses . . . . .	12
2.5	Einige Fakten über Hilberträume . . . . .	18
<b>A</b>	<b>Literatur</b>	<b>21</b>

# 1 Einleitung

**Zeitreihe** zeitlich geordnete Folge von Beobachtungen  $\{x_t\}$  eines quantitativen Merkmals

**Diskrete Zeitreihe** einzelne (höchstens abzählbare unendlich viele) verschiedene Beobachtungspunkte

**Stetige Zeitreihe** Beobachtungszeitpunkte füllen ein ganzes Intervall

Die Theorie diskreter Zeitreihen ist i.A. einfacher als die stetiger Zeitreihen. Bei diskreten Zeitreihen der Praxis kann man den Zeitmaßstab so wählen, dass die Beobachtungszeitpunkte ganze Zahlen sind.

## Wichtige Aufgabenstellungen im Zusammenhang mit Zeitreihen

- Vorhersage der zukünftigen Entwicklung
- Filtration
- Steuerung der zukünftigen Entwicklung

$$\begin{array}{ccccccc} x_1, & x_2, & \dots & x_n & & & x_{n+1} \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow & & & \downarrow \\ X_1 & X_2 & \dots & X_n & X_{n+1} = g(X_1, \dots, X_n) & & \end{array}$$
$$X_{n+1} = \sum_{j=1}^n a_j X_j$$
$$\hat{x}_{n+1} = \sum_{j=1}^n a_j x_j$$

**Zur Geschichte der Analyse stationärer Zeitreihen** Begründer der Analyse stationärer Zeitreihen: H. Wold (1908-1992)<sup>1</sup>. Eine mathematisch solide Grundlage für stationäre Zeitreihen wurde von A. N. Kolmogorov<sup>2</sup> (1903-1987) und N. Wiener<sup>3</sup> (1894-1964) erarbeitet.

<sup>1</sup>H. Wold, A Study in the Analysis of Stationary Time Series, 2d ed. Wiksell, Stockholm 1954, (Original: 1938, Dissertation von H. Wold)

<sup>2</sup>A.N.Kolmogorov, Stationäre Folgen im Hilbertraum, Bull. Moskauer Staatl. Univ. 2 (1941), No. 6, 1-40 (russisch)

<sup>3</sup>N. Wiener, Extrapolation, Interpolation and Smoothing of Stationary Time Series. With Engineering Applications, Mass. Inst. Techn. Cambridge, Mass. 1949

## 2 Stationäre zufällige Prozesse

### 2.1 Zufällige (oder: stochastische) Prozesse. Grundbegriffe

**Definition 2.1.1 (stochastischer Prozess)** Ein zufälliger (oder: stochastischer) Prozess ist eine Familie  $\{X_t : t \in T\}$  von i.A. komplexwertigen Zufallsgrößen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ . Die Größe  $t$  heisst Parameter und die Menge  $T$  Parametermenge des zufälligen Prozesses. ( $t_0 \in T : X_{t_0} : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ , alternativ:  $X : T \times \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ ) Für jedes  $\omega \in \Omega$  und jedes  $t \in T$  heisst der Funktionswert  $X_t(\omega)$  der Zufallsgröße  $X_t$  an der Stelle  $\omega$  eine Realisierung von  $X_t$ . Für jedes  $\omega \in \Omega$  heisst die Funktion  $T \ni t \rightarrow X_t(\omega)$  eine Realisierung des zufälligen Prozesses  $\{X_t : t \in T\}$ . Falls insbesondere  $T \subseteq \mathbb{R}$ , spricht man anstelle von Realisierung von der Trajektorie des Prozesses  $\{X_t : t \in T\}$ .

**Bemerkung 2.1.1** 1. Anstelle von zufälliger (oder: stochastischer) Prozess sagen wir oft nur Prozess.

2. Anstelle von  $\{X_t : t \in T\}$  schreiben wir manchmal einfach  $\{X_t\}$ .

3. In der Praxis treten üblicherweise reelle Prozesse, d.h. solche, bei denen  $X_t, t \in T$ , reellwertige Zufallsgrößen, sind.

**Definition 2.1.2 (Verteilungsfunktion)** Sei  $\{X_t : t \in T\}$  ein reeller Prozess. Für jedes  $n \in \mathbb{N}$  und beliebige  $t_1, \dots, t_n \in T$  heisst die Funktion

$$F_{t_1, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_n) := P(X_{t_1} \leq x_1, X_{t_2} \leq x_2, \dots, X_{t_n} \leq x_n),$$

$x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ , eine endlichdimensionale Verteilungsfunktion und das zugehörige Maß eine endlichdimensionale Verteilung des Prozesses  $\{X_t\}$ .

**Bemerkung 2.1.2** In der Definition 2.1.2 wird nicht vorausgesetzt, dass die  $t_i$  paarweise verschieden sind. Jedoch kann man jede endlichdimensionale Verteilungsfunktion, bei der einige  $t_i$  zusammenfallen, durch eine endlichdimensionale Verteilungsfunktion mit paarweise verschiedenen  $t_i$  ausdrücken. Seien z.B.  $n = 3, t_1 = t_2 \neq t_3$ . Dann ist

$$\begin{aligned} F_{t_1, t_2, t_3}(x_1, x_2, x_3) &= P(X_{t_1} \leq x_1, X_{t_2} \leq x_2, X_{t_3} \leq x_3) \\ &= P(X_{t_1} \leq \min(x_1, x_2), X_{t_3} \leq x_3) \\ &:= F_{t_1, t_3}(\min(x_1, x_2), x_3). \end{aligned}$$

Wir werden deshalb i.w. die auftretenden  $t_i$  als paarweise verschieden ansehen.

Die endlichdimensionalen Verteilungen haben die folgenden Eigenschaften:

1. Ist  $i_1, \dots, i_n$  eine Permutation der Zahlen  $1, \dots, n$ , so ist

$$F_{t_{i_1}, \dots, t_{i_n}}(x_{i_1}, \dots, x_{i_n}) = F_{t_1, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_n),$$

$$x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}.$$

2. Für beliebige  $t_1, \dots, t_n, t_{n+1} \in T$  gilt

$$\lim_{x_{n+1} \rightarrow \infty} F_{t_1, \dots, t_n, t_{n+1}}(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) = F_{t_1, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_n),$$

$$x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}.$$

**Satz 2.1.1 (Kolmogorov)** *Sei jeder endlichen Teilmenge  $\{t_1, \dots, t_n\} \subseteq T$  (mit paarweise verschiedenen  $t_i$ ) eine Verteilungsfunktion  $F_{t_1, \dots, t_n}$  auf  $\mathbb{R}^n$  zugeordnet. Diese Familie von Verteilungsfunktionen ist genau dann die Familie der endlichdimensionalen Verteilungsfunktionen eines reellen Prozesses  $\{X_t : t \in T\}$ , wenn sie die Eigenschaften 1 und 2 besitzt.*

In der Familie aller endlichdimensionalen Verteilungsfunktionen eines reellen Prozesses ist i.w. alle Information über den Prozess enthalten.

**Definition 2.1.3 (Gaußscher Prozess)** *Ein reeller Prozess  $\{X_t : t \in T\}$  heißt Gaußscher Prozess, falls seine sämtlichen endlichdimensionalen Verteilungen Normalverteilungen sind.*

## 2.2 Stationarität

**Definition 2.2.1 (Stationarität)** *Ein reeller Prozess  $\{X_t : t \in \mathbb{Z}\}$  (bzw.  $\{X_t : t \in \mathbb{R}\}$ ) heißt stationär im engeren Sinne, falls für alle  $n \in \mathbb{N}, t_1, \dots, t_n \in \mathbb{Z}$  (bzw.  $t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R}$ ) und  $h \in \mathbb{Z}$  (bzw.  $h \in \mathbb{R}$ ) gilt  $F_{t_1, \dots, t_n} = F_{t_1+h, \dots, t_n+h}$ .*

**Bemerkung 2.2.1** In der Literatur wird anstelle von „stationär im engeren Sinne“ meist einfach der Begriff „stationär“ benutzt.

**Definition 2.2.2 (Prozess zweiter Ordnung, Autokovarianzfunktion)**

Ein (komplexwertiger) Prozess  $\{X_t : t \in T\}$  heißt Prozess zweiter Ordnung, falls  $X_t \in L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$  (äquivalent:  $\text{Var}(X_t) < \infty$ ) für  $t \in T$ . Die Funktion

$$\begin{aligned} T \times T \ni (r, s) \rightarrow K_X(r, s) &= \text{Cov}(X_r, X_s) \\ &= E((X_r - EX_r)(\overline{X_s - EX_s})) \\ &= \int_{\Omega} ((X_r(\omega) - EX_r)(\overline{X_s(\omega) - EX_s}))P(d\omega) \end{aligned}$$

heißt Autokovarianzfunktion des Prozesses zweiter Ordnung  $\{X_t\}$ .

**Definition 2.2.3 (stationärer Prozess)** Ein Prozess  $\{X_t : t \in \mathbb{Z}\}$  (bzw.  $\{X_t : t \in \mathbb{R}\}$ ) heißt stationär, falls er

1. ein Prozess zweiter Ordnung ist,
2. eine konstante Erwartungswertfunktion hat, d.h.  $EX_t = m$  für ein gewisses  $m \in \mathbb{C}$  und alle  $t \in \mathbb{Z}$  (bzw.  $t \in \mathbb{R}$ ) ist,
3. eine translationsinvariante Autokovarianzfunktion hat, d.h.  $K_X(r, s) = K_X(r + t, s + t)$  für alle  $r, s, t \in \mathbb{Z}$  (bzw.  $r, s, t \in \mathbb{R}$ ) ist.

**Bemerkung 2.2.2** 1. In der Literatur werden anstelle von „stationär“ meist die Begriffe „stationär im weiteren Sinne“ bzw. „schwach stationär“ benutzt.

2. Jeder reelle Prozess zweiter Ordnung, der stationär im engeren Sinne ist, ist stationär.
3. Ein Gaußscher Prozess ist genau dann stationär, wenn er stationär im engeren Sinne ist.
4. Im weiteren betrachten wir fast ausschließlich stationäre Prozesse auf  $\mathbb{Z}$ . Sie werden auch stationäre Folgen genannt.

Setzt man in 3. von Definition 2.2.3  $t = -s$ , so folgt

$$K_X(r, s) = K_X(r - s, 0) = \gamma_X(r - s).$$

Die Funktion  $\mathbb{Z} \ni t \rightarrow \gamma_X(t) := K_X(t, 0)$  heißt ebenfalls Autokovarianzfunktion des Prozesses  $\{X_t : t \in \mathbb{Z}\}$ , und es gilt

$$\gamma_X(t) = K_X(t, 0) = \text{Cov}(X_t, X_0) = \text{Cov}(X_{t+s}, X_s)$$

und

$$\gamma_X(r - s) = \text{Cov}(X_r, X_s).$$

**Satz 2.2.1** Ist  $\{X_t : t \in \mathbb{Z}\}$  stationär mit  $EX_t = m$ , so ist

$$\{Y_t := X_t - m : t \in \mathbb{Z}\}$$

stationär mit  $EY_t = 0$  und  $\gamma_Y = \gamma_X$ .

**Beweis:** Triviale Rechnung. □

Auf Grund von Satz 2.2.1 werden wir im Weiteren meist voraussetzen, dass die Erwartungswertfunktion eines stationären Prozesses konstant gleich 0 ist.

**Beispiel 2.2.1** 1. Sei  $Z_t \in L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$  mit  $EZ_t = 0$ ,  $E|Z_t|^2 = \text{Var}(Z_t) = \sigma^2 > 0$ . Außerdem sei  $E(Z_t \bar{Z}_s) = 0, t, s \in \mathbb{Z}, t \neq s$ . Dann ist  $\{Z_t : t \in \mathbb{Z}\}$  ein stationärer Prozess mit  $EZ_t = 0$  und

$$\begin{aligned} \gamma_Z(0) &= E|Z_0|^2 = \sigma^2, \\ \gamma_Z(t) &= \underbrace{E(Z_t \bar{Z}_0)}_{=E(Z_{t+s} \bar{Z}_s)} = 0, t \neq 0 \\ \gamma_Z(t) &= \begin{cases} \sigma^2, & t = 0 \\ 0, & t \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}. \end{cases} \end{aligned}$$

Der Prozess  $\{Z_t : t \in \mathbb{Z}\}$  heißt weißes Rauschen, und wir schreiben  $\{Z_t : t \in \mathbb{Z}\} \sim WN(0; \sigma^2)$ .

2. Ist  $\{Z_t : t \in \mathbb{Z}\} \sim WN(0; \sigma^2)$  und  $\Theta_1 \in \mathbb{C}$ , so ist  $\{X_t : t \in \mathbb{Z}\}$  mit  $X_t := Z_t + \Theta_1 Z_{t-1}, t \in \mathbb{Z}$ , stationär mit  $EX_t = 0$  und

$$\gamma_Z(t) = \begin{cases} (1 + |\Theta_1|^2)\sigma^2, & t = 0 \\ \Theta_1 \sigma^2, & t = 1 \\ \bar{\Theta}_1 \sigma^2, & t = -1 \\ 0, & |t| \geq 2 \end{cases}$$

sowie

$$\begin{aligned} \gamma_X(0) &= E|Z_0|^2 + \Theta_1 E(Z_1 \bar{Z}_0) + \bar{\Theta}_1 E(Z_0 \bar{Z}_1) + |\Theta_1|^2 E|Z_{-1}|^2 \\ &= \sigma^2 + |\Theta_1|^2 \sigma^2 \\ &= (1 + |\Theta_1|^2)\sigma^2. \end{aligned}$$

3. Ist  $\{X_t : t \in \mathbb{Z}\}$  ein stationärer Prozess mit  $EX_t = m$  und ist  $\psi_1 \in \mathbb{C}$ , so ist  $\{Y_t : t \in \mathbb{Z}\}$  mit  $Y_t := X_t + \psi_1 X_{t-1}$  stationär mit  $EY_t = (1 + \psi_1)m$  und

$$\begin{aligned}
\gamma_Y(s) &= E(Y_{t+s} - EY_{t+s})(\overline{Y_t - EY_t}) \\
&= E(X_{t+s} + \psi_1 X_{t+s-1} - E(\psi_1 X_{t+s-1}))(\overline{X_t + \psi_1 X_{t-1} - E(\psi_1 X_{t-1})}) \\
&= E(X_{t+s} - EX_{t+s} + \psi_1(X_{t+s-1} - EX_{t+s-1}))(\overline{X_t - EX_t + \psi_1(X_{t-1} - EX_{t-1})}) \\
&= E((X_{t+s} - EX_{t+s})(\overline{X_t - EX_t})) + \\
&= \gamma_X(s) + \psi_1 \gamma_X(s-1) + \overline{\psi_1} \gamma_X(s+1) + |\psi_1|^2 \gamma_X(s), s \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

4. Seien  $Y_1, \dots, Y_n \in L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$  paarweise unkorreliert mit  $EY_j = 0$  und  $EY_j^2 = \sigma_j^2$ ,  $j = 1, \dots, n$ . Seien  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in (-\pi, \pi]$  paarweise verschieden. Dann ist  $\{X_t : t \in \mathbb{Z}\}$  mit  $X_t := \sum_{j=1}^n e^{i\lambda_j t} Y_j$ ,  $t \in \mathbb{Z}$ , ein stationärer Prozess. Dabei ist  $EX_t = 0$  und

$$\begin{aligned}
\gamma_X(t) &= E(X_{t+s} \overline{X_s}) \\
&= E \left( \left( \sum_{j=1}^n e^{i\lambda_j(t+s)} Y_j \right) \overline{\left( \sum_{j=1}^n e^{i\lambda_j s} Y_j \right)} \right) \\
&= \sum_{j=1}^n e^{i\lambda_j t} \sigma_j^2.
\end{aligned}$$

◇

## 2.3 Beseitigung von Trend und saisonaler Komponente

In vielen Fällen ist ein stationärer Prozess als stochastisches Modell einer Zeitreihe ungeeignet. Die Daten müssen dann zunächst so modifiziert werden, dass man sie als stationäre Zeitreihe ansehen kann. Dazu gibt es verschiedene Verfahren, die aber i.A. nicht streng mathematisch begründet sind.

Man nimmt an, dass sich  $\{X_t : t \in \mathbb{Z}\}$  in drei Komponenten zerlegen lässt.

$$X_t = m_t + s_t + Y_t, t \in \mathbb{Z}.$$

Dabei sind:

- $m_t$  - nichtzufällige Trendkomponente ( $\cong$  langfristigen, systematischen Veränderungen des mittleren Niveaus)



- $s_t$  - nichtzufällige saisonale (periodische) Komponente (z.B. Konjunkturzyklus, jahreszeitlich bedingte Schwankungen)
- $Y_t$  - zufällige stationäre Restkomponente ( $\cong$  nicht vorhersehbaren zufälligen Einflüssen)

Prinzipiell gibt es zwei Möglichkeiten, die zu  $\{Y_t\}$  gehörige Zeitreihe zu erhalten:

1. Ermittlung von Schätzungen  $\hat{m}_t$  bzw.  $\hat{s}_t$  für  $m_t$  bzw.  $s_t$  und Berechnung von  $\hat{y}_t := x_t - \hat{m}_t - \hat{s}_t$ .
2. Beseitigung von  $m_t$  und  $s_t$  durch (evtl. mehrmalige) Differenzenbildung.

### Beseitigung des Trends, falls die saisonale Komponente fehlt

1. **Methode** Gegeben seien  $x_t, t = 1, \dots, n$ . Wir wählen einen einfachen Ausdruck für  $m_t$ , z.B.  $m_t = a_0 + a_1 t + \dots + a_l t^l$  (dabei kann häufig  $l = 1$  oder  $l = 2$  gewählt werden) und bestimmen dann die unbekanntenen Koeffizienten  $a_0, \dots, a_l$  so, dass

$$\sum_{t=1}^n (x_t - a_0 - a_1 t - \dots - a_l t^l)^2$$

minimal wird. Die Werte des entstehenden Polynoms an den Stellen  $t = 1, \dots, n$  dienen als Schätzungen der Trendkomponente  $\hat{m}_t$  und  $\hat{y}_t := x_t - \hat{m}_t$  als Schätzungen für die Restkomponente.

2. **Methode (Glättung durch gleitende Mittel)** Sei  $X_t = m_t + Y_t$ , mit  $t \in \mathbb{Z}$ . Seien  $q \in \mathbb{N}$ ,  $q + 1 \leq t \leq n \cdot q$ . Wir setzen voraus, dass sich  $m_{t+j}$  für  $j = -q, \dots, q$  linear verhält, d.h.  $m_{t+j} = c(t+j) + b$  mit gewissen  $b, c \in \mathbb{R}$ . Außerdem nehmen wir an, dass

$$\frac{1}{2q+1} \sum_{j=-q}^q Y_{t+j} \approx 0$$

ist. Dann ist

$$\frac{1}{2q+1} \sum_{j=-q}^q X_{t+j} = \frac{1}{2q+1} \left[ \sum_{j=-q}^q (c(t+j) + b) + \sum_{j=-q}^q Y_{t+j} \right] \approx ct + b = m_t.$$

Deshalb können wir

$$\hat{m}_t = \frac{1}{2q+1} \sum_{j=-q}^q x_{t+j}$$

als Schätzung für  $m_t$  und  $\hat{y}_t := x_t - \hat{m}_t$  als Schätzung für die Restkomponente wählen.

Sei  $\{X_t : t \in \mathbb{Z}\}$  ein stochastischer Prozess zweiter Ordnung. Man bezeichnet Ausdrücke der Form

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j X_{t-j}, t \in \mathbb{Z},$$

als gleitende Mittel bzw. lineare Filter  $\{X_t\}$ . Es gilt folgende Aussage: Der Filter  $\sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j m_{t-j}$  lässt genau dann alle Polynome vom Grad kleiner gleich  $k$  ungefiltert (unverändert) durch, wenn  $\sum a_j = 1$  und  $\sum j^r a_j = 0$  (\*) für  $r = 1, \dots, k$  ist. (Alle Reihen seien absolut konvergent.)

**Beweis:** Sei  $m_t = c_0 + c_1 t + \dots + c_k t^k$ . Dann ist

$$\begin{aligned} \sum_j a_j m_{t-j} &= \sum_j a_j \sum_{l=0}^k c_l (t-j)^l \\ &= \sum_{l=0}^k c_l \sum_j a_j (t-j)^l. \end{aligned}$$

Es ist

$$\begin{aligned} \sum_j a_j (t-j)^l &= \sum_j a_j \sum_{s=0}^l (-1)^s \binom{l}{s} t^{l-s} \cdot j^s \\ &= \sum_{s=0}^l (-1)^s \binom{l}{s} t^{l-s} \sum_j a_j \cdot j^s. \end{aligned}$$

Wegen (\*) ist  $\sum_j a_j j^s = 0$  für  $s = 1, 2, \dots, l$  und  $\sum_j a_j j^s = 1$  für  $s = 0$ . Somit ist  $\sum_j a_j (t-j)^l = t^l$ , also  $\sum_j a_j m_{t-j} = \sum_{l=0}^k c_l \sum_j a_j (t-j)^l = \sum_{l=0}^k c_l \cdot t^l = m_t$ .

Lässt andererseits ein linearer Filter das Polynom  $t \rightarrow t^k$  ungefiltert durch, so gilt  $t^k = \sum_j a_j (t-j)^k$ . Es ist aber  $\sum_j a_j (t-j)^k = \sum_j a_j \sum_{s=0}^k (-1)^s \binom{k}{s} t^{k-s} \cdot j^s = \sum_{s=0}^k (-1)^s \binom{k}{s} t^{k-s} \sum_j a_j j^s$ , d.h. der Koeffizient bei  $t^{k-s}$  ist  $(-1)^s \binom{k}{s} \sum_j a_j j^s$ . Da die Koeffizienten bei  $s =$

$1, 2, \dots, k$  gleich 0 sein müssen, muss  $\sum_j a_j j^s = 0$  sein,  $s = 1, \dots, k$ . Für  $s = 0$  entsteht der Koeffizient bei  $t^k$  der gleich 1 sein muss, als  $\sum_j a_j = 1$ . Somit gilt (\*).  $\square$

**3. Methode (Differenzenmethode)** Es bezeichne  $B$  den Rückwärtsshift:  $BX_t := X_{t-1}$ ,  $t \in \mathbb{Z}$ . Weiter sei  $\Delta X_t = X_t - X_{t-1} = (1 - B)X_t$ . Für  $k \in \mathbb{N}$  bedeuten  $B^k$  bzw.  $\Delta^k$  die  $k$ -malige Nacheinanderausführung von  $B$  bzw.  $\Delta$ . Dabei ergeben sich analoge Rechengesetze wie bei Polynomen, z.B.  $\Delta^2 = \Delta\Delta = (1 - B)^2 = (1 - B)(1 - B) = 1 - 2B + B^2$ ,  $(1 - 2B + B^2)X_t = X_t - 2X_{t-1} + X_{t-2}$ ,  $\Delta(\Delta X_t) = \Delta(X_t - X_{t-1}) = X_t - X_{t-1} - (X_{t-1} - X_{t-2}) = X_t - 2X_{t-1} + X_{t-2}$ .

Wird  $\Delta$  auf ein Polynom  $k$ -ten Grades angewendet, so entsteht ein Polynom von höchstens  $(k - 1)$ -ten Grad. Hieraus folgt: Falls der Trend

$$m_t = \sum_{j=0}^k c_j t^j$$

ist, so ist

$$\Delta^k m_t = \Delta^k \left( \sum_{j=0}^k c_j t^j \right) = \Delta^k (c_k t^k) + \Delta^k \left( \sum_{j=0}^{k-1} c_j t^j \right) = c_k \Delta^k (t^k).$$

Es gilt  $\Delta^k (t^k) = k!$ . Beweis durch vollständige Induktion:

$$\begin{aligned} \Delta^{k+1}(t^{k+1}) &= \Delta^k \Delta(t^{k+1}) \\ &= \Delta^k (t^{k+1} - (t-1)^{k+1}) \\ &= \Delta^k ((k+1)t^k + \underbrace{P_{k-1}(t)}_{\text{Polynom } (k-1)\text{-ten Grades}}) = (k+1) \cdot k! = (k+1)!. \end{aligned}$$

## Beseitigung von Trend und saisonaler Komponente

$$X_t = m_t + s_t + Y_t, EY_t = 0, t \in \mathbb{Z}$$

Die saisonale Komponente habe die Periode  $d \in \mathbb{N}$ , d.h.  $s_t = s_{t+d}$ ,  $t \in \mathbb{Z}$ . Außerdem kann man annehmen, dass  $\sum_{k=1}^d s_k = 0$  ist. (Wäre  $\sum_{k=0}^q s_k =: s \neq 0$ , so könnte man  $s_k$  durch  $s_k - \frac{s}{d}$  und  $m_k$  durch  $m_k + \frac{s}{d}$  ersetzen.)

**1. Methode (Methode bei schwachem Trend)** Wir induzieren die Datenmenge durch  $x_{j,k}$ , wobei  $j$  die Nummer der Periode und  $k$  die

Stellung innerhalb der Periode angibt. (Z.B. bei monatlichen Messwerten mit der Periode eines Jahres gibt  $j$  die Nummer des Jahres und  $k$  die Nummer des Monats an.) Die Anzahl der durchlaufenen Perioden sei  $\tilde{d}$ , d.h.  $j = 1, \dots, \tilde{d}$ . Es gilt  $\sum_{k=1}^d s_{j,k} = 0$  für  $j = 1, \dots, \tilde{d}$ , sowie  $s_{j,k} = s_{j+1,k} =: s_k$ ,  $k = 1, \dots, d$ ,  $j = 1, \dots, \tilde{d} - 1$ . Es sei vorausgesetzt, dass der Trend innerhalb eines Jahres konstant ist, d.h.  $m_{j,k} = m_{j,1} =: \mu_j$  für alle  $j = 1, \dots, \tilde{d}$  und  $k = 1, \dots, d$ . Außerdem  $\sum_{k=1}^d Y_{j,k} \approx 0$  für  $j = 1, \dots, \tilde{d}$  und  $\sum_{j=1}^{\tilde{d}} Y_{j,k} \approx 0$  für  $k = 1, \dots, d$ . Dann ist

$$\frac{1}{d} \sum_{k=1}^d X_{j,k} = \frac{1}{d} \left( \sum_{k=1}^d (\mu_j + s_{j,k} + Y_{j,k}) \right) = \mu_j.$$

Somit  $\hat{\mu}_j := \frac{1}{d} \sum_{k=1}^d X_{j,k}$ . Weiter ist  $X_{j,k} - \hat{\mu}_j = s_{j,k} + Y_{j,k}$ ,  $j = 1, \dots, \tilde{d}$ . Summation über  $j$  gibt

$$\sum_{j=1}^{\tilde{d}} (X_{j,k} - \hat{\mu}_j) = \sum_{j=1}^{\tilde{d}} s_k + \sum_{j=1}^{\tilde{d}} Y_{j,k} \approx \sum_{j=1}^{\tilde{d}} s_k = \tilde{d}s_k,$$

also

$$\hat{s}_k := \frac{1}{\tilde{d}} \sum_{j=1}^{\tilde{d}} (X_{j,k} - \hat{\mu}_j).$$

**2. Methode (Gleitende-Mittel-Methode)** (keine weiteren Ausführungen)

**3. Methode (Differenzenmethode mit Schrittweite  $d$ )** Wegen  $s_t = s_{t+d}$  gilt

$$\begin{aligned} (1 - B^d)X_t &= X_t - X_{t-d} \\ &= m_t - m_{t-d} + s_t - s_{t-d} + Y_t - Y_{t-d} \\ &= m_t - m_{t-d} + Y_t - Y_{t-d}, \end{aligned}$$

d.h. in der Zeitreihe  $\{\tilde{X}_t\}$  mit  $\tilde{X}_t := X_t - X_{t-d}$  tritt keine saisonale Komponente mehr auf. Der Trend kann nun durch die früher beschriebenen Methoden beseitigt werden.

## 2.4 Autokovarianzfunktion eines stationären Prozesses

**Definition 2.4.1** Eine Funktion  $\gamma: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$  heißt positiv definit, falls für alle  $n \in \mathbb{N}$ ,  $t_1, \dots, t_n \in \mathbb{Z}$ ,  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$  die Ungleichung

$$\sum_{j,k=1}^n \gamma(t_j - t_k) \bar{a}_j a_k \geq 0 \quad (1)$$

gilt.

Setzt man  $a|^* := (\dots)$ , so kann man Formel 1 in Matrixform schreiben:

$$a|^* (\gamma(t_j - t_k))_{j=1, \dots, n}^{k=1, \dots, n} A \geq 0.$$

Es ist also  $\gamma$  genau dann positiv definit, wenn jede Matrix  $(\gamma(t_j - t_k))_{j=1, \dots, n}^{k=1, \dots, n}$  positiv semidefinit ist.

**Bemerkung 2.4.1** Man kann zeigen, dass man in der Definition 2.4.1 die  $t_j$  als paarweise verschieden ansehen darf. Außerdem gilt: Für die positive Definitheit einer Funktion  $\gamma: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$  ist notwendig und hinreichend, dass für jedes  $n \in \mathbb{N}$  die Matrix

$$(\gamma(k - j))_{j=1, \dots, n}^{k=1, \dots, n} = \begin{pmatrix} \gamma(0) & \gamma(1) & \gamma(2) & \dots & \gamma(n-1) \\ \gamma(-1) & \gamma(0) & \gamma(1) & \dots & \gamma(n-2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma(1-n) & \gamma(2-n) & \gamma(3-n) & \dots & \gamma(0) \end{pmatrix}$$

**Beispiel 2.4.1** Sei  $\gamma(t) := e^{it}$ ,  $t \in \mathbb{Z}$ .

$$\begin{aligned} \sum_{j,k=1}^n \gamma(t_j - t_k) \bar{a}_j a_k &= \sum_{j,k=1}^n e^{i(t_j - t_k)} \bar{a}_j a_k \\ &= \sum_{j,k=1}^n e^{it_j} \bar{a}_j e^{-it_k} a_k \\ &= \left| \sum_{k=1}^n e^{it_k} \bar{a}_k \right|^2 \geq 0. \end{aligned}$$

◇

**Satz 2.4.1** Eine positiv definite Funktion  $\gamma: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ , die nicht identisch gleich 0 ist, hat die folgenden Eigenschaften:

1.  $\gamma(0) > 0$ ,
2.  $\gamma(t) = \overline{\gamma(-t)}$ ,

3.  $|\gamma(t)| \leq \gamma(0), t \in \mathbb{Z}$ .

**Beweis:** Benutzt man Definition 2.4.1 mit  $n := 2, t_1 := t, t_2 := 0$ , so ergibt das, dass die Matrix

$$\begin{pmatrix} \gamma(0) & \gamma(t) \\ \gamma(-t) & \gamma(0) \end{pmatrix}$$

positiv semidefinit sein muss. Daraus folgen unmittelbar 1.-3. □

**Satz 2.4.2** *Eine Funktion  $\gamma: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$  ist genau dann Autokovarianzfunktion eines stationären Prozesses, wenn sie positiv definit ist.*

**Beweis:** Sei  $\gamma = \gamma_X$  die Autokovarianzfunktion eines stationären Prozesses  $\{X_t : t \in \mathbb{Z}\}$ . Dann ist

$$\begin{aligned} \sum_{j,k=1}^n \gamma_X(t_j - t_k) \bar{a}_j a_k &= \sum_{j,k=1}^n \text{Cov}(X_j, X_k) \bar{a}_j a_k \\ &= \sum_{j,k=1}^n E \left( (X_j - EX_j) \overline{(X_k - EX_k)} \right) \bar{a}_j a_k \\ &= \sum_{j,k=1}^n E \left( \bar{a}_j (X_j - EX_j) \overline{(\bar{a}_k (X_k - EX_k))} \right) \\ &= {}^4 E \left| \sum_{j=1}^n \bar{a}_j (X_j - EX_j) \right|^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Umgekehrt kann man mit Hilfe des Satzes 2.1.3 bewiesen werden, dass für reellwertige positiv definite Funktionen  $\gamma$  ein Gaußscher stationärer Prozess  $\{X_t : t \in \mathbb{Z}\}$  mit  $\gamma = \gamma_X$  existiert. □

**Beispiel 2.4.2** Sei  $\gamma(0) = 1$ .

1. Für welche Werte  $r \in \mathbb{C}$  ist die Funktion  $\gamma(t) = r^t, t \geq 0, \gamma(t) = r^{-t}$ , für  $t < 0, t \in \mathbb{Z}$ , positiv definit? Dazu muss

$$\begin{vmatrix} 1 & r & r^2 & \dots & r^{n-2} & r^{n-1} \\ \bar{r} & 1 & r & \dots & r^{n-3} & r^{n-2} \\ \bar{r}^2 & \bar{r} & 1 & \dots & r^{n-4} & r^{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \bar{r}^{n-2} & \bar{r}^{n-3} & \bar{r}^{n-4} & \dots & 1 & r \\ \bar{r}^{n-1} & \bar{r}^{n-2} & \bar{r}^{n-3} & \dots & \bar{r} & 1 \end{vmatrix} > 0$$

für alle  $n \in \mathbb{N}$  sein. Es ist

$$\begin{aligned}
\det A_n &= \det A_{n-1} - r \det \begin{vmatrix} \bar{r} & r & \dots & r^{n-3} & r^{n-2} \\ \bar{r}^2 & 1 & \dots & r^{n-4} & r^{n-3} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \bar{r}^{n-2} & \bar{r}^{n-4} & \dots & 1 & r \\ \bar{r}^{n-1} & \bar{r}^{n-3} & \dots & \bar{r} & 1 \end{vmatrix} \\
&= \det A_{n-1} - r \cdot \bar{r} \cdot \det \begin{vmatrix} 1 & r & \dots & r^{n-3} & r^{n-2} \\ \bar{r} & 1 & \dots & r^{n-4} & r^{n-3} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \bar{r}^{n-3} & \bar{r}^{n-4} & \dots & 1 & r \\ \bar{r}^{n-2} & \bar{r}^{n-3} & \dots & \bar{r} & 1 \end{vmatrix} \\
&= (1 - |r|^2) \det A_{n-1}.
\end{aligned}$$

Somit ist  $\det A_n = (1 - |r|^2)^{n-2} \det A_2 = (1 - |r|^2)^{n-1}$ . Das ist größer als 0 genau dann, wenn  $|r| < 1$  ist,  $n \in \mathbb{N}$ . Somit sind alle  $A_n$  positiv definit genau dann, wenn  $|r| < 1$  ist. Somit: Falls  $|r| < 1$ , so ist  $\gamma$  positiv definit. Falls  $|r| > 1$ , so ist z.B.  $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & r \\ \bar{r} & 1 \end{pmatrix}$  nicht positiv semidefinit. Somit ist für  $|r| > 1$  die Funktion  $\gamma$  nicht positiv definit. Ist  $|r| = 1$ , so ist  $A_n(r) = \lim_{\varepsilon \uparrow 1} A_n(\varepsilon r)$  als Grenzwert positiver definiter Matrizen positiv semidefinit. Also ist für  $|r| = 1$  die Funktion  $\gamma$  auch positiv definit.

2. Für welche  $r \in \mathbb{C}$  ist die Funktion  $\gamma$  mit  $\gamma(0) = 1$ ,  $\gamma(1) = r$ ,  $\gamma(-1) = \bar{r}$ ,  $\gamma(t) = 0$  für  $|t| \geq 2$  positiv definit.<sup>5</sup> Wir betrachten den Prozess

$$\{X_t : t \in \mathbb{Z}\} \text{ und } X_t = Z_t + aZ_{t-1}, t \in \mathbb{Z}, a \in \mathbb{C}, Z_t \sim WN(0, \sigma^2). \quad (2)$$

Entsprechend dem Beispiel 2.2.1 ist dies ein stationärer Prozess mit Autokovarianzfunktion  $\gamma$ .

$$\gamma_X(t) = \begin{cases} (1 + |a|^2)\sigma^2 & , t = 0 \\ a\sigma^2 & , t = 1 \\ \bar{a}\sigma^2 & , t = -1 \\ 0 & , |t| \geq 2 \end{cases}, t \in \mathbb{Z}.$$

Wir versuchen  $a \in \mathbb{C}$  und  $\sigma^2 > 0$  so zu wählen, dass

$$\begin{cases} 1 = (1 + |a|^2)\sigma^2 \\ r = a\sigma^2 \end{cases}$$

<sup>5</sup>Dieses Beispiel findet sich in dem Buch von Brockwell, Davis.

ist. Aus  $r = a\sigma^2$  folgt wegen  $\sigma^2 > 0$ , dass  $\arg r = \arg a$  gilt. Ist  $a = 0$  und  $\sigma^2 = 1$ , so entsteht die positiv definite Funktion  $\gamma$  mit  $\gamma(0) = 1$ ,  $\gamma(1) = \gamma(-1) = 0$ ,  $\gamma(t) = 0$ ,  $|t| \geq 2$ . Sei  $a \neq 0$  und damit auch  $r \neq 0$ . Dann ist

$$\sigma^2 = \frac{r}{a} = \frac{|r| \cdot e^{i \arg r}}{|a| \cdot e^{i \arg a}} = \frac{|r|}{|a|}.$$

Setzt man das in die erste Gleichung ein, erhält man

$$1 = (1 + |a|^2) \cdot \frac{|r|}{|a|}$$

oder

$$|a|^2 - \frac{|a|}{|r|} + 1 = 0.$$

Daraus folgt

$$|a| = \frac{1}{2|r|} \pm \sqrt{\frac{1 - 4|r|^2}{4|r|^2}} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4|r|^2}}{2|r|}.$$

Da  $|a|$  reell ist, muss  $1 - 4|r|^2 \geq 0$  oder  $|r| \leq \frac{1}{2}$  sein. Somit: Für  $|r| \leq \frac{1}{2}$  ist  $\gamma$  positiv definit. Sei nun  $|r| > \frac{1}{2}$ . Wir müssen die positive Semidefinitheit von

$$\begin{pmatrix} 1 & r & & & 0 \\ \bar{r} & 1 & r & & \\ & \bar{r} & 1 & r & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & \ddots & \ddots & r \\ 0 & & & & \bar{r} & 1 \end{pmatrix} =: A_n(r)$$

überprüfen.<sup>6</sup> Es ist  $\det A_1(r) = 1 = \det A_1(|r|)$  und  $\det A_2(r) = 1 - |r|^2 = \det A_2(|r|)$ . Sei vorübergehend  $r \in \mathbb{R}$ ,  $r > \frac{1}{2}$ . Wir nehmen außerdem  $n$  ungerade. Dann gilt

$$(1 \ 1 \ \dots \ 1) \begin{pmatrix} 1 & r & & & 0 \\ \bar{r} & 1 & r & & \\ & \bar{r} & 1 & r & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & \ddots & \ddots & r \\ 0 & & & & \bar{r} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ \vdots \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

---

<sup>6</sup> $A_n$  ist eine  $n \times n$ -Matrix.



$$(1 \ 1 \ \dots \ 1) \begin{pmatrix} 1-r \\ r-1+r \\ -r+1-r \\ r-1+r \\ \vdots \\ -r+1 \end{pmatrix} = (n-1)(1-2r) + 1$$

Die Nichtnegativität dieses Ausdrucks ist gleichbedeutend mit  $n-1 \leq \frac{1}{2r-1}$ , was nicht für alle ungeraden  $n \in \mathbb{N}$  erfüllt werden kann. Folglich existiert im Falle  $r > \frac{1}{2}$  ein  $n_0(r)$ , so dass  $A_{n_0}(r)$  nicht positiv semidefinit ist (\*).

$$\begin{aligned} \det A_n(r) &= \det \begin{pmatrix} 1 & r & & & 0 \\ \bar{r} & 1 & r & & \\ & \bar{r} & 1 & r & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & \ddots & \ddots & r \\ 0 & & & & \bar{r} & 1 \end{pmatrix} \\ &= 1 \cdot \det A_{n-1}(r) - r \cdot \det \begin{pmatrix} \bar{r} & r & & & \\ 0 & 1 & r & \dots & 0 \\ 0 & \bar{r} & 1 & r & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \bar{r} & 1 \end{pmatrix} \\ &= \det A_{n-1}(r) - |r|^2 \det A_{n-2}(r) \implies \det A_n(r) = \det A_n(|r|) \end{aligned}$$

Wegen (\*) existiert für jedes  $r > \frac{1}{2}$  ein  $n_1 \in \mathbb{N}$ , mit  $\det A_{n_1}(r) \leq 0$ . Somit existiert für jedes  $r$  mit  $|r| > \frac{1}{2}$  ein  $n_1 \in \mathbb{N}$  mit  $\det A_{n_1}(|r|) = \det A_{n_1}(r) \leq 0$ . Es sei  $n_1$  die kleinste natürliche Zahl mit dieser Eigenschaft. Dann ist  $\det A_{n_1+1}(r) = \underbrace{\det A_{n_1}(r)}_{\leq 0} - \underbrace{|r|^2 \det A_{n_1-1}(r)}_{> 0} < 0$ .

Hieraus folgt dann, dass  $A_{n_1+1}(r)$  nicht positiv semidefinit ist.

3. Für welche  $r \in \mathbb{C}$  ist  $\gamma$  mit  $\gamma(0) = 1$ ,  $\gamma(t) = r$ ,  $t \geq 1$ ,  $\gamma(t) = \bar{r}$ ,  $t \leq -1$ , positiv definit? Antwort:  $r \in [0, 1]$ .

◇

## 2.5 Einige Fakten über Hilberträume

Sei  $H$  ein Hilbertraum über  $\mathbb{C}$  (oder  $\mathbb{R}$ ) mit Skalarprodukt  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  und Norm  $\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$ ,  $x \in H$ .

**Definition 2.5.1** Zwei Elemente  $x, y \in H$  heißen orthogonal, falls  $\langle x, y \rangle = 0$ . Ist  $M$  eine Teilmenge von  $H$ , so bezeichnet  $M^\perp$  das orthogonale Komplement:  $M^\perp := \{y \in H : \langle x, y \rangle = 0 \text{ für alle } x \in M\}$  von  $M$  in  $H$ .

**Lemma 2.5.1** Für jede Teilmenge  $M$  von  $H$  ist  $M^\perp$  ein abgeschlossener Unterraum von  $H$ .

**Satz 2.5.1 (Projektionssatz)** Sei  $\tilde{H}$  ein abgeschlossener Unterraum von  $H$ . Für jedes  $x \in H$  existiert ein eindeutig bestimmtes  $\tilde{x} \in \tilde{H}$  mit

$$\|x - \tilde{x}\| = \inf_{\tilde{y} \in \tilde{H}} \|x - \tilde{y}\| = \min_{\tilde{y} \in \tilde{H}} \|x - \tilde{y}\|.$$

Ein Element  $\tilde{x} \in \tilde{H}$  erfüllt Lemma 2.5.1 genau dann, wenn  $x - \tilde{x} \in \tilde{H}^\perp$  ist.

Ist  $\tilde{H}$  ein abgeschlossener Unterraum von  $H$ , so definieren wir die Abbildung  $P_{\tilde{H}}: H \rightarrow \tilde{H}$  durch  $P_{\tilde{H}}x := \tilde{x}$ ,  $x \in H$ , wobei  $\tilde{x}$  das eindeutig bestimmte Element aus Satz 2.5.1 ist. Es gilt:  $P_{\tilde{H}}$  bildet  $H$  auf  $\tilde{H}$  ab und  $I - P_{\tilde{H}}$  bildet  $H$  auf  $\tilde{H}^\perp$  ab. ( $I$  - identischer Operator in  $H$ ).  $P_{\tilde{H}}$  ist (orthogonale) Projektion(sabbildung) von  $H$  auf  $\tilde{H}$ .  $P_{\tilde{H}}x$  ist (orthogonale) Projektion von  $x$  auf  $\tilde{H}$ .

**Satz 2.5.2 (Eigenschaften der Projektionsabbildung)** 1. Linearität:

$$P_{\tilde{H}}(ax + by) = aP_{\tilde{H}}x + bP_{\tilde{H}}y \text{ für alle } x, y \in H, a, b \in \mathbb{C} \text{ (bzw. } \mathbb{R}\text{)}.$$

2. Jedes  $x \in H$  hat eine eindeutige Darstellung  $x = \tilde{x} + z$  mit  $\tilde{x} \in \tilde{H}$  und  $z \in \tilde{H}^\perp$ , und zwar  $x = P_{\tilde{H}}x + (I - P_{\tilde{H}})x$ .

3. Satz des Pythagoras:  $\|x\|^2 = \|P_{\tilde{H}}x\|^2 + \|(I - P_{\tilde{H}})x\|^2$ .

4.  $x \in \tilde{H} \Leftrightarrow P_{\tilde{H}}x = x$

5. Idempotenz von  $P_{\tilde{H}}$ :  $P_{\tilde{H}}^2 = P_{\tilde{H}}$

6. Kontraktivität (insbesondere Beschränktheit) von  $P_{\tilde{H}}$ , genauer:  $\|P_{\tilde{H}}x\| \leq \|x\|$ ; falls  $\tilde{H} \neq \{0\}$ , ist  $\|P_{\tilde{H}}\| = 1$

7. Stetigkeit von  $P_{\tilde{H}}$ : Falls  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ , so gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} P_{\tilde{H}}x_n = P_{\tilde{H}}x$ .
8. Es ist  $I - P_{\tilde{H}}$  die Projektionsabbildung auf  $\tilde{H}^\perp$ .
9. Es ist  $P_{\tilde{H}}\tilde{x} = 0 \Leftrightarrow \tilde{x} \in \tilde{H}$ .
10. Selbstadjungiertheit von  $P_{\tilde{H}}$ :  $P_{\tilde{H}} = P_{\tilde{H}}^*$ , d.h.  $\langle P_{\tilde{H}}x, y \rangle = \langle x, P_{\tilde{H}}y \rangle$  für alle  $x, y \in H$ .
11. Ist  $\tilde{H}$  ein abgeschlossener Unterraum von  $H$ , so ist  $\tilde{H} \subseteq \tilde{\tilde{H}}$  genau dann, wenn  $P_{\tilde{H}}P_{\tilde{\tilde{H}}} = P_{\tilde{H}}$  gilt. In diesem Fall ist auch  $P_{\tilde{\tilde{H}}}P_{\tilde{H}} = P_{\tilde{H}}$ .

**Definition 2.5.2 (lineare Hülle)** Für eine nichtleere Menge  $\{X_t : t \in T\}$  von Elementen aus  $H$  ist die lineare Hülle  $sp\{X_t : t \in T\}$  definiert als die Menge aller (endlichen) Linearkombinationen der Elemente  $X_t$ ,  $t \in T$ . Ihr Abschluss  $\overline{sp}\{X_t : t \in T\}$ , d.h. der kleinste abgeschlossene Unterraum, der alle  $X_t$ ,  $t \in T$ , enthält, heißt abgeschlossene lineare Hülle.

Wegen der Stetigkeit und Linearität (in der ersten Komponente) des Skalarproduktes gilt

$$\{X_t : t \in T\}^\perp = (sp\{X_t : t \in T\})^\perp = (\overline{sp}\{X_t : t \in T\})^\perp. \quad (3)$$

Sei  $\{M_t : t \in T\}$  eine Familie von Untermengen. Dann ist  $sp\{M_t : t \in T\} := sp(\bigcup_{t \in T} M_t)$ , entsprechend  $\overline{sp}\{M_t : t \in T\} := \overline{sp}(\bigcup_{t \in T} M_t)$ . Es gilt

$$(\overline{sp}\{M_t : t \in T\})^\perp = \bigcap_{t \in T} M_t^\perp. \quad (4)$$

**Beispiel 2.5.1** Für eine endliche Menge  $\{x_1, \dots, x_n\} \subseteq H$  ist  $sp\{x_1, \dots, x_n\} = \overline{sp}\{x_1, \dots, x_n\} := \tilde{H}$  die Menge aller Elemente  $x$  der Form

$$x = \sum_{j=1}^n a_j x_j, a_j \in \mathbb{C}, j = 1, \dots, n. \quad (5)$$

Die orthogonale Projektion  $P_{\tilde{H}}y$  eines beliebigen Elementes  $y \in H$  auf  $\tilde{H}$  hat demnach die Form (5) und erfüllt die Gleichungen  $\langle y - P_{\tilde{H}}y, x \rangle = 0$  für alle  $x \in \tilde{H} \Leftrightarrow \langle y - P_{\tilde{H}}y, x_k \rangle = 0$  für  $k = 1, \dots, n$  bzw.  $\langle y, x_k \rangle = \langle P_{\tilde{H}}y, x_k \rangle$ ,  $k = 1, \dots, n$ . Mit  $P_{\tilde{H}}y := \sum_{j=1}^n a_j x_j$  gibt das für die Unbekannten  $a_1, \dots, a_n$  das lineare Gleichungssystem

$$\sum_{j=1}^n a_j \langle x_j, x_k \rangle = \langle y, x_k \rangle, k = 1, \dots, n. \quad (6)$$

Da nach Satz 2.5.1 (2.5.3)  $P_{\tilde{H}}y$  existiert, hat Gleichung 6 stets mindestens eine Lösung für die Unbekannten  $a_1, \dots, a_n$ . Da nach Satz 2.5.1 (2.5.3)  $P_{\tilde{H}}y$  eindeutig bestimmt ist, ergeben alle Lösungen von Gleichung 6 das gleiche Element  $P_{\tilde{H}}y$ .  $\diamond$

## A Literatur

- P.J. Brockwell, R.A. Davis, Time Series: Theory and Methods, 2-nd edition, Springer, New York 2006 (ausführlicher und mehr Beispiele, Beweise kompakter)
- J.P. Kreiß, G. Neuhaus, Einführung in die Zeitreihenanalyse, Springer, Berlin 2006 (spezielles Kapitel zu Zeitreihen in der Finanzmathematik)
- R. Storm, Wahrscheinlichkeitsrechnung, mathematische Statistik und statistische Qualitätskontrolle, 10. Auflage, Fachbuchverlage Leipzig-Köln 1995
- K. Urbanik, Lectures on Prediction Theory, Lecture Notes in Mathematics 44, Springer, Berlin-New York 1967
- H. Wold, A Study in the Analysis of Stationary Time Series, 2d ed. Wiksell, Stockholm 1954, (Original: 1938, Dissertation von H. Wold)
- A.N.Kolmogorov, Stationäre Folgen im Hilbertraum, Bull. Moskauer Staatl. Univ. 2 (1941), No. 6, 1-40 (russisch)
- N. Wiener, Extrapolation, Interpolation and Smoothing of Stationary Time Series. With Engineering Applications, Mass. Inst. Techn. Cambridge, Mass. 1949

# Index

Autokovarianzfunktion, 6

Gaußscher Prozess, 5

Hülle

lineare, 19

Komponente

periodische, 9

Rest-, 9

saisonale, 9

Trend-, 8

lineare Hülle, 19

periodische Komponente, 9

Projektionssatz, 18

Prozess

Gaußscher, 5

stationärer, 6

stochastischer, 4

zufälliger, 4

zweiter Ordnung, 6

Restkomponente, 9

saisonale Komponente, 9

Satz

von Kolmogorov, 5

Stationarität, 5

Trendkomponente, 8

Verteilungsfunktion, 4