Aufgabe 1

Die diskrete Zufallsgröße X ist unter den gegebenen Bedingungen gleichverteilt und symmetrisch. Aufgrund der Symmetrie ist der Erwartungswert $E(X) = 0$. Dies gilt für alle X^n mit $n = 2k+1, k \in \mathbb{N}$. Die Verteilung von X^n mit $n = 2k, k \in \mathbb{N}$ ist nicht symmetrisch da X^n nur Werte ≥ 0 und $\exists x_i > 0$ mit $p_i > 0$. Damit kann der Erwartungswert $E(X^n)$ unmöglich 0 sein. Es gilt

$$\begin{aligned} E(X^n) = 0 &\quad \text{für alle } n = 2k+1, k \in \mathbb{N}, \\ E(X^n) > 0 &\quad \text{für alle } n = 2k, k \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Vor.: X und X^n sind unkorrelliert $\Leftrightarrow C(X, X^n) = 0$

Beh.: (1) X und X^n sind unkorrelliert für gerade $n \in \mathbb{N}$
(2) X und X^n sind korrelliert für ungerade $n \in \mathbb{N}$

Beweis:

(1) Sei $c = 2k, k \in \mathbb{N}$ beliebig.

$$\begin{aligned} C(X, X^n) &= E(X \cdot X^2) - E(X) \cdot E(X^n) \\ &= E(X^{n+1}) - 0 \cdot E(X^n) \\ &= E(X^{2k+1}) \\ &= 0 \Rightarrow \text{Beh. (1)} \end{aligned}$$

(2) Sei $c = 2k+1, k \in \mathbb{N}$ beliebig.

$$\begin{aligned} C(X, X^n) &= E(X \cdot X^2) - E(X) \cdot E(X^n) \\ &= E(X^{n+1}) - 0 \cdot E(X^n) \\ &= E(X^{2(k+1)}) \\ &> 0 \Rightarrow \text{Beh. (2)} \end{aligned}$$

Berechnung von $C(X, X)$ und $C(X, X^2)$:

$$\begin{aligned} C(X, X) &= E(X \cdot X) - E(X) \cdot E(X) \\ &= E(X^2) \\ &= 2 \cdot \sum_{i=1}^{N} i^2 \cdot \frac{1}{2 \cdot N + 1} \\ &= \frac{2}{2 \cdot N + 1} \cdot \sum_{i=1}^{N} i^2 \\ &= \frac{2}{2N+1} \cdot \frac{N(N+1)(2N+1)}{6} \\ &= \frac{N(N+1)}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C(X, X^2) &= E(X \cdot X^2) - E(X) \cdot E(X^2) \\ &= E(X^3) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Aufgabe 2

Da X exponentiell verteilt ist, gilt für die Dichte:

$$f_X(y) = \begin{cases} 0, & y < 0 \\ \alpha \cdot e^{-\alpha y}, & y \geq 0 \end{cases} \quad \text{für ein } \alpha < 0$$

Vorerst Berechnung der Verteilungsfunktion F_X:

$$\begin{aligned} F_X(a) &= P(X < a) \\ &= \int_{-\infty}^{a} f_X(y)\, dy \\ &= \begin{cases} \int_0^a \alpha \cdot e^{-\alpha y}\, dy, & y \geq 0 \\ 0, & sonst \end{cases} \\ &= \begin{cases} 1 - e^{-\alpha a}, & y \geq 0 \\ 0, & sonst \end{cases} \end{aligned}$$

Berechnung der Verteilungsfunktion F_{X^2}:

$$\begin{aligned} F_{X^2}(a) &= P(X^2 < a) \\ &= \begin{cases} P(|X| < \sqrt{a}), & a \geq 0 \\ 0, & sonst \end{cases} \\ &= \begin{cases} P(-\sqrt{a} < X < \sqrt{a}), & a \geq 0 \\ 0, & sonst \end{cases} \\ &= \begin{cases} F_X(\sqrt{a}) - F_X(-\sqrt{a}), & a \geq 0 \\ 0, & sonst \end{cases} \\ &= \begin{cases} F_X(\sqrt{a}), & a \geq 0 \\ 0, & sonst \end{cases} \\ &= \begin{cases} 1 - e^{-\alpha\sqrt{a}}, & a \geq 0 \\ 0, & sonst \end{cases} \end{aligned}$$

Damit ergibt sich die Verteilungsdichte f_X:

$$f_X(a) = F'_X(a) = \begin{cases} 0, & a < 0 \\ \dfrac{\alpha}{2\sqrt{a}} \cdot e^{-\alpha\sqrt{a}}, & a \geq 0 \end{cases} \quad \text{für ein } \alpha < 0$$

Aufgabe 3

Berechnung:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{(X,Y)}(x,y)\;dx\;dy &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} c\cdot(1-xy^3)\;dx\;dy \\
&= c\cdot\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}(1-xy^3)\;dx\;dy \\
&= c\cdot\int_{-1}^{1}\left[(x-\frac{1}{2}x^2y^3)\right]_{-1}^{1}\;dy \\
&= c\cdot\int_{-1}^{1} 2\;dy \\
&= c\cdot[2y]_{-1}^{1} \\
&= 4c
\end{aligned}$$

Da $f_{(X,Y)}$ Dichte ist, muß gelten:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{(X,Y)}(x,y)\;dx\;dy = 1$$

Damit läßt sich c wie folgt ermitteln:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{(X,Y)}(x,y)\;dx\;dy = 1 \Leftrightarrow 4c = 1 \Leftrightarrow \underline{\underline{c = \frac{1}{4}}}$$

Berechnung der Kovarianz $C(X,Y)$:

$$\begin{aligned}
E(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\;dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\left(x\int_{-\infty}^{\infty} f_{(X,Y)}(x,y)dy\right)dx \\
&= \int_{-1}^{1}\left(x\int_{-1}^{1} c\cdot(1-xy^3)dy\right)dx \\
&= \int_{-1}^{1} x\left[c\cdot(y-xy^4)\right]_{-1}^{1}\;dx \\
&= \left[2cx^2\right]_{-1}^{1} \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\underline{\underline{C(X,Y)}} &= E(X\cdot Y) - E(X)\cdot E(Y) \\
&= E(X\cdot Y) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xy f_{(X,Y)}(x,y)\,dx\,dy \\
&= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} xy\cdot c\cdot(1-xy^3)\,dx\,dy \\
&= c\cdot\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} (xy - x^2y^4)\,dx\,dy \\
&= c\cdot\int_{-1}^{1} \left[\frac{1}{2}x^2y - \frac{1}{3}x^3y^4\right]_{-1}^{1} dy \\
&= c\cdot\int_{-1}^{1} -\frac{2}{3}y^4\,dy \\
&= c\cdot\left[-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{5}y^5\right]_{-1}^{1} \\
&= c\cdot\left(-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{5}\cdot 2\right) \\
&= \underline{\underline{-\frac{4c}{15}}}
\end{aligned}
$$

Aufgabe 4

a) Die Verteilungsdichten:

$$
\begin{aligned}
f_X(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{(X,Y)}(x,y)\,dy \\
&= \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{\pi}\,dy \qquad (1) \\
&= 2\cdot\left[\frac{1}{\pi}y\right]_0^{\sqrt{1-x^2}} \\
&= \begin{cases} \frac{2\sqrt{1-x^2}}{\pi}, & 0 \le x \le 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f_Y(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{(X,Y)}(x,y)\,dx \\
&= \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \frac{1}{\pi}\,dx \qquad (2) \\
&= 2\cdot\left[\frac{1}{\pi}x\right]_0^{\sqrt{1-y^2}} \\
&= \begin{cases} \frac{2\sqrt{1-y^2}}{\pi}, & 0 \le y \le 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}
\end{aligned}
$$

Zu (1) und (2): die vorgegebenen Kreisfläche K ist definiert für $x^2 + y^2 \leq 1$. Innerhalb des Kreises beträgt die Dichte $\frac{1}{\pi}$, außerhalb ist sie 0. In den Zwischenschritten beschränke ich mich deshalb auf die Angabe der jeweiligen Dichte innerhalb des Kreises, d.h. für $y^2 + x^2 \leq 1$. Weiterhin ergeben sich aus der letzten Ungleichung folgende Ungleichungen, die für die Berechnung des Integrals von Bedeutung sind: $|y| \leq \sqrt{1-x^2}$ und $|x| \leq \sqrt{1-y^2}$.

$$\begin{aligned} F_R(r) &= P(R < r) \\ &= P(\sqrt{X^2+Y^2} < r) \\ &= \frac{1}{\pi} \cdot |K \cap E_r| \end{aligned}$$

K sei die Fläche des Kreises, der durch $x^2 + y^2 \leq 1$ bestimmt wird und E_r sei die Fläche, welche durch $\sqrt{x^2+y^2} \leq r$ definiert ist. Damit gilt:

$$F_R(r) = \begin{cases} 0, & r < 0 \\ r^2, & 0 \leq r \leq 1 \\ 1, & r > 1 \end{cases}$$

f_R läßt sich nun ganz einfach berechnen:

$$f_R(r) = F_R'(r) = \begin{cases} 2r, & 0 \leq r \leq 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

b) Die Zufallsgrößen X und Y sind stochastisch abhängig, denn für $x = 0$ und $y = 0$ gilt:

$$f_{(X,Y)}(x,y) = \frac{1}{\pi} \neq \frac{4}{\pi^2} = \frac{2\sqrt{1-x^2}}{\pi} \cdot \frac{2\sqrt{1-y^2}}{\pi} = f_X(x) \cdot f_Y(y)$$

Aufgabe 5

X und Y sind stochastisch unabhängig und auf Intervall $[0,1]$ gleichmäßig verteilt.

$$\Rightarrow f_X(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{und} \quad f_Y(y) = \begin{cases} 1, & 0 \leq y \leq 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Aufgrund der stochastischen Unabhängigkeit gilt:

$$f_{(X,Y)}(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x, y \leq 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Nun kann man die Dichte $f_{(X,Y)}$ geometrisch als ein Quadrat mit den Koordinaten $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,1)$, $(1,0)$ im kartesischen Koordinatensystem betrachten.

$$F_{X+Y}(a) = P(X+Y < a) = \begin{cases} 0, & a < 0, \text{ denn } 0+0=0 \\ 1, & a > 2, \text{ denn } 1+1=2 \end{cases}$$

Für $0 < a \leq 1$ ergibt die Fläche $Q' = \{(x,y) | x,y \in [0,1] \wedge x+y \leq a\}$ ein rechtwinkliges, gleichschenkliges Dreieck und es gilt

$$F_{X+Y}(a) = \frac{a^2}{2}$$

Für $1 < a \leq 2$ ergibt die Fläche Q' ebenfalls ein solches Dreieck und es gilt

$$F_{X+Y}(a) = F_{X+Y}(1) + \frac{(1-a)^2}{2} = 0,5 + \frac{(2-a)^2}{2}$$

Zusammen ergibt das

$$F_{X+Y}(a) = \begin{cases} 0, & a \leq 0 \\ \frac{a^2}{2}, & 0 < a \leq 1 \\ 0,5 + \frac{(2-a)^2}{2}, & 1 < a \leq 2 \\ 1, & a > 2 \end{cases}$$

Mit $f_{X+Y}(a) = F'_{X+Y}(a)$ ergibt sich dann

$$f_{X+Y}(a) = \begin{cases} 0, & a \leq 0 \\ a, & 0 < a \leq 1 \\ a-2, & 1 < a \leq 2 \\ 0, & a > 2 \end{cases}$$