Aufgabe 1

X ist hypergeometrisch verteilt, d.h.

$$P(X=k) = H_{N,M,n}(k) = \frac{\binom{N}{k} \cdot \binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

wobei $N = 10$ die Anzahl der Personen in der Gruppe, davon $M = 5$ die Anzahl der Frauen, sowie $n = 4$ die Anzahl der aus dieser Gruppe ausgewählten Personen beschreibt. Die Anzahl der Frauen in dieser Auswahl wird durch k beschrieben.

a)

$$\begin{aligned} P(X=1) &= \frac{\binom{5}{1} \cdot \binom{5}{3}}{\binom{10}{4}} \\ &= \frac{5}{21} \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} P(X=2) &= \frac{\binom{5}{2} \cdot \binom{5}{2}}{\binom{10}{4}} \\ &= \frac{10}{21} \end{aligned}$$

Aufgabe 2

X ist Poisson verteilt, d.h.

$$P(X=k) = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}$$

wobei $E(X) = 2,5$ gegeben ist. Da X Poisson verteilt ist, gilt $\lambda = E(X) = 2,5$.

a)

$$\begin{aligned} P(X=0) &= \frac{2,5^0}{0!} \cdot e^{-2,5} \\ &\approx 0,08208 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} P(X=1) &= \frac{2,5^1}{1!} \cdot e^{-2,5} \\ &\approx 0,2052 \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} P(X>3) &= 1 - (P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3)) \\ &\approx 0,2424 \end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned} P(X<6) &= P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)+P(X=5) \\ P(X=0) &= \left(\frac{2,5^0}{0!}+\frac{2,5^1}{1!}+\frac{2,5^2}{2!}+\frac{2,5^3}{3!}+\frac{2,5^4}{4!}+\frac{2,5^5}{5!}\right)\cdot e^{-2,5} \\ &\approx 0,9580 \end{aligned}$$

Aufgabe 3

Tabelle mit Randverteilungen:

$Y\backslash X$	-1	0	1	Y
-1	1/6	1/6	1/6	1/2
-1	1/4	1/8	1/8	1/2
X	5/12	7/24	7/24	

$$\begin{aligned} E(X) &= -1\cdot\frac{5}{12}+0\cdot\frac{7}{24}+1\cdot\frac{7}{24} \\ &= -\frac{1}{8} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V(X) &= \left(-\frac{1}{8}-(-1)\right)^2\cdot\frac{5}{12}+\left(-\frac{1}{8}-0\right)^2\cdot\frac{7}{24}+\left(-\frac{1}{8}-1\right)^2\cdot\frac{7}{24} \\ &= \frac{133}{192} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(Y) &= -1\cdot\frac{1}{2}+1\cdot\frac{1}{2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V(Y) &= (0-(-1))^2\cdot\frac{1}{2}+(0-1)^2\cdot\frac{1}{2} \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho(X,Y) &= \frac{C(X,Y)}{\sigma(X)\cdot\sigma(y)} \\ &= \frac{E((X-E(X))\cdot(Y-E(Y)))}{\sqrt{V(X)}\cdot\sqrt{V(Y)}} \\ &= \frac{\sum_{\omega\in\Omega}(X(\omega)-E(X))\cdot(Y(\omega)-E(Y))\cdot P(\{\omega\})}{\sqrt{V(X)}\cdot\sqrt{V(Y)}} \\ &= \frac{\frac{7}{8}\cdot\frac{1}{6}-\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{6}-\frac{9}{8}\cdot\frac{1}{6}-\frac{7}{8}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{8}+\frac{9}{8}\cdot\frac{1}{8}}{\sqrt{\frac{133}{192}}\cdot\sqrt{1}} \\ &= \frac{-\frac{1}{64}}{\sqrt{\frac{133}{192}}} \\ &\approx -0,01877 \end{aligned}$$

Aufgabe 4

Tabelle der Wahrscheinlichkeiten $p_{i,k}$ und den Randverteilungen:

$Y \backslash X$	1	2	3	4	5	6	Y
1	1/36	0	0	0	0	0	1/36
2	1/36	2/36	0	0	0	0	3/36
3	1/36	1/36	3/36	0	0	0	5/36
4	1/36	1/36	1/36	4/36	0	0	7/36
5	1/36	1/36	1/36	1/36	5/36	0	9/36
6	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	6/36	11/36
X	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	

$$\begin{aligned}
E(X) &= \sum_{i=1}^{6} i \cdot P(X=i) \\
&= \frac{1}{6} \cdot \sum_{i=1}^{6} i = \frac{21}{6} \\
&= 3,5
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E(Y) &= \sum_{i=1}^{6} i \cdot P(Y=i) \\
&= \sum_{i=1}^{6} i \cdot \frac{(2i-1)}{36} \\
&= \frac{1}{36} \cdot \sum_{i=1}^{6} 2i^2 - i \\
&= \frac{1}{36} \left(2 \cdot \sum_{i=1}^{6} i^2 - \sum_{i=1}^{6} i \right) \\
&= \frac{1}{36} (2 \cdot 91 - 21) \\
&= \frac{161}{36}
\end{aligned}$$

Aufgabe 5

Die Zufallsgröße $X+Y$ ist ebenfalls Poisson verteilt mit dem Parameter $\lambda + \mu$.

Beh.: $\quad P(X+Y=k) = \frac{(\lambda+\mu)^k}{k!} \cdot e^{-(\lambda+\mu)}$

Beweis:

$$\begin{aligned}
P(X+Y=k) &= \sum_{i+j=k} P(X=i)P(Y=j) \\
&= \sum_{i=0}^{k} P(X=i)P(Y=k-i) \\
&= \sum_{i=0}^{k} \frac{\lambda^i}{i!}e^{-\lambda} \cdot \frac{\mu^{k-i}}{(k-i)!}e^{-\mu} \\
&= e^{-\lambda}e^{-\mu} \cdot \sum_{i=0}^{k} \frac{\lambda^i \cdot \mu^{k-i}}{(k-i)! \cdot i!} \\
&= e^{-\lambda-\mu} \cdot \sum_{i=0}^{k} \frac{k!}{(k-i)! \cdot i! \cdot k!} \cdot \lambda^i \cdot \mu^{k-i} \\
&= e^{-\lambda-\mu} \cdot \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \cdot \frac{1}{k!} \cdot \lambda^i \cdot \mu^{k-i} \\
&= e^{-\lambda-\mu} \cdot \frac{1}{k!} \cdot \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \cdot \lambda^i \cdot \mu^{k-i} \\
&= e^{-\lambda-\mu} \cdot \frac{1}{k!} \cdot (\lambda+\mu)^k \\
&= \frac{(\lambda+\mu)^k}{k!} \cdot e^{-(\lambda+\mu)}
\end{aligned}$$

Aufgabe 6

Ablaufplan (Pseudocode):

```
double feld[N]; // Initialisiert ein double-Feld der Größe N
feld[0]= p_0;
for(int i=1; i<N; i++)
   feld[i]= feld[i-1] + p_i;
for(int i=1; i<10; i++){ // Simulation von 10 Zufallsversuchen
   double zufall= rand();
   int j;
   for(j=0; zufall>=feld[i]; i++);
   print(„Die Zufallsgröße X nimmt den Wert “ + j + „ an“);
}
```