## Aufgabe 1

Ereignisse:
$$\begin{aligned} M_1 &= \{\text{eine zufällig herausgegriffene Person gehört zur Gruppe M}_1\} \\ M_2 &= \{\text{eine zufällig herausgegriffene Person gehört zur Gruppe M}_2\} \\ K &= \{\text{eine zufällig herausgegriffene Person ist krank}\} \end{aligned}$$

geg.: $P(M_1) = 0,5 \quad P(M_2) = 0,5 \quad (\text{da } |\mathrm{M}_1| = |\mathrm{M}_2|)$
$P(K|M_1) = 0,05$
$P(K|M_2) = 0,01$

ges.: $P(M_1|K)$

$$\begin{aligned} P(M_1|K) &= \frac{P(K \cap M_1)}{P(K)} \\ &= \frac{P(K|M_1) \cdot P(M_1)}{P(K|M_1) \cdot P(M_1) + P(K|M_2) \cdot P(M_2)} \\ &= \frac{0,05 \cdot 0,5}{0,05 \cdot 0,5 + 0,01 \cdot 0,5} \\ &= \frac{5}{6} \end{aligned}$$

## Aufgabe 2

Ereignisse:
$$\begin{aligned} S &= \{\text{Fahrgast ist Schwarzfahrer}\} \\ E_n &= \{\text{Kontrolleur ertappt bei der Überprüfung von } n \text{ Fahrgästen mindestens einen Schwarzfahrer}\} \end{aligned}$$

geg.: $P(S) = 0,08$
$P(\overline{S}) = 1 - P(S) = 0,92$

ges.: $n : P(E_n) \geq 0,9$

$$\begin{aligned} P(E_n) &= 1 - P(\overline{S})^n \geq 0,9 \\ \Leftrightarrow &\quad 0,1 \geq P(\overline{S})^n = 0,92^n \\ \Leftrightarrow &\quad n \geq \log_{0,92} 0,1 \\ \Leftrightarrow &\quad n \geq 27,615 \\ \Leftrightarrow &\quad n \geq 28 \quad (n \in \mathbb{N}) \end{aligned}$$

Der Kontrolleur muß mindestens 28 Fahrgäste kontrollieren, damit er mit 90% Wahrscheinlichkeit einen Schwarzfahrer ertappt.

## Aufgabe 3

geg.: $X$ ist Zufallsgröße, welche die Werte $0, 1, ..., 6$ annimmt
$X$ ist damit diskret

ges.: Parameter p der zugehörigen Binomialverteilung $B_{6,p}(\cdot)$

$$
\begin{aligned}
& P(X=3) = \binom{6}{3} \cdot p^3 \cdot (1-p)^{6-3} = 0,1318 \\
\Leftrightarrow \quad & 20 \cdot p^3 \cdot (1-p)^3 = 0,1318 \\
\Leftrightarrow \quad & (p-p^2)^3 = \tfrac{0,1318}{20} \\
\Leftrightarrow \quad & p - p^2 = \sqrt[3]{\tfrac{0,1318}{20}} \\
\Leftrightarrow \quad & p^2 - p + \sqrt[3]{\tfrac{0,1318}{20}} = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & p_{1/2} = \tfrac{1}{2} \pm \sqrt{\tfrac{1}{4} - \sqrt[3]{\tfrac{0,1318}{20}}} \\
& p_1 \approx \tfrac{3}{4} \\
& p_2 \approx \tfrac{1}{4}
\end{aligned}
$$

D.h. p ist nicht eindeutig bestimmt. Die beiden möglichen Binomialverteilungen sind $B_{6,\frac{3}{4}}(\cdot)$ und $B_{6,\frac{1}{4}}(\cdot)$.

## Aufgabe 4

geg.: $X$ ist Zufallsgröße, welche die Werte $x_k = k, \quad k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ annimmt
$X$ ist binomialverteilt
Wahrscheinlichkeiten $p_k = \frac{45}{\pi^4} \cdot k^{-4} = \frac{45}{\pi^4 k^4}$

ges.: $E(X)$
$V(X)$

$$
\begin{aligned}
E(X) &= \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} x_k p_k \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \left( -k \cdot \frac{45}{\pi^4 \cdot (-k)^4} + k \cdot \frac{45}{\pi^4 \cdot k^4} \right) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} 0 \\
&= 0
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
V(X) &= \sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} (x_k - E(X))^2 p_k \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \big((x_{-k}-0)^2 p_{-k} + (x_k - 0)^2 p_k\big) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \left((-k)^2 \cdot \frac{45}{\pi^4\cdot(-k)^4} + k^2 \cdot \frac{45}{\pi^4 \cdot k^4}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} 2k^2 \frac{45}{\pi^4 k^4} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{90}{\pi^4 k^2} \\
&= \frac{90}{\pi^4} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \\
&= \frac{90}{\pi^4} \cdot \frac{\pi^2}{6} \\
&= \frac{15}{\pi^2} \\
&\approx 1,5198
\end{aligned}$$

## Aufgabe 5

Zufallsgrößen: $Y$ beschreibt die Augenzahl beim 1. Wurf
$Z$ beschreibt die Augenzahl beim 1. Wurf
$X$ beschreibt das Produkt der beiden Augenzahlen

$\Omega = \{(a,b)|a,b \in \{1,2,3,4\}\} \Rightarrow |\Omega| = 4^2 = 16$
$Y$ und $Z$ nehmen jeweils die Werte 1, 2, 3, 4 an.
Die Folgende Tabelle zeigt die Produkte der einzelnen $Y$-Werte mit den $Z$-Werten.

| | | Y | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | 1 | 2 | 3 | 4 |
| | 1 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| Z | 2 | 2 | 4 | 6 | 8 |
| | 3 | 3 | 6 | 9 | 12 |
| | 4 | 4 | 8 | 12 | 16 |

Damit lassen sich die absoluten Häufigkeiten $H_{|\Omega|}(X = x_k)$ für die Werte $x_k$ von $X$ durch abzählen ermitteln. Die Wahrscheinlichkeiten $p_k$ ergeben sich dann aus $\frac{H_{|\Omega|}(X = x_k)}{|\Omega|}$.

| $x_k$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 6 | 8 | 9 | 12 | 16 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $H_{16}(X = x_k)$ | 1 | 2 | 2 | 3 | 2 | 2 | 1 | 2 | 1 |
| $p_k = P(X = x_k)$ | $\frac{1}{16}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{3}{16}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{16}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{16}$ |

$$\begin{aligned}
E(X) &= \sum_{x_k} x_k p_k \\
&= 1\cdot\frac{1}{16} + 2\cdot\frac{1}{8} + 2\cdot\frac{1}{8} + 3\cdot\frac{3}{16} + 2\cdot\frac{1}{8} + 2\cdot\frac{1}{8} + 1\cdot\frac{1}{16} + 2\cdot\frac{1}{8} + 1\cdot\frac{1}{16} \\
&= 6,25
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V(X) &= \sum_{x_k}(x_k - E(X))^2 p_k \\ &= 17,1875 \\ \sigma(X) &= \sqrt{V(X)} \\ &\approx 4,1458 \end{aligned}$$

## Aufgabe 6

Realisierung mit einer Java-Application.

**Klasse** *Approx*:

```
public class Approx {
  /**
   * Die Funktion, welche die Fläche nach oben begrenzt.
   *
   * @param x Eingabewert/x-Wert
   * @return Funktionswert/y-Wert
   */
  public static double f(double x){
    return 1 - Math.pow(x,3);
  }

  /**
   * Liefert die Anzahl der im Feld liegenden Zufallspunkte bei N Zufallspunkten.
   *
   * @param N Anzahl der Zufallspunkte (gesamt)
   * @return Anzahl der im Feld liegenden Zufallspunkte
   */
  public static int anzahlImFeld(int N){
    double x, y;
    int anz= 0;
    for(int i=0; i<N; i++){
      x= Math.random();
      y= Math.random();
      if(y <= f(x))
        anz++;
    }

    return anz;
  }

  public static void main(String[] argv) {
    for(int N=100; N< 100000; N*=10){
      int A= anzahlImFeld(N);
      System.out.println("Ergebnis bei " + N + " Zufallspunkten:");
      System.out.println("  Anzahl im Feld: " + A);
      System.out.println("  geschätzter Feläucheninhalt: " + (double)A/(double)N + "\n");
    }
  }
}
```

**folgende Ausgabe:**

```
Ergebnis bei 100 Zufallspunkten:
  Anzahl im Feld: 74
  geschätzter Felächeninhalt: 0.74

Ergebnis bei 1000 Zufallspunkten:
  Anzahl im Feld: 743
  geschätzter Felächeninhalt: 0.743

Ergebnis bei 10000 Zufallspunkten:
  Anzahl im Feld: 7481
  geschätzter Felächeninhalt: 0.7481
```

**Exakte Berechnung von $|F|$**

$$\begin{aligned} |F| &= \int_0^1 (1-x^3)dx \\ &= \left[x - \frac{1}{4}x^4\right]_0^1 \\ &= \left(1 - \frac{1}{4}1^4\right) - \left(0 - \frac{1}{4}0^4\right) \\ &= 1 - \frac{1}{4} \\ &= \frac{3}{4} \\ &= 0.75 \end{aligned}$$

$\rightarrow$ entspricht rund den oben berechneten Werten.