Übungsaufgaben STOCHASTIK, Serie 6, Abgabe: 4.7.03

1. Es sei X eine diskrete Zufallsgröße mit den Werten $x_i \in \{-N, ..., N\}$ und den zugehörigen Einzelwahrscheinlichkeiten $p_i = 1/(2 \cdot N + 1)$. Für welche $n \in \mathbf{N}$ sind die Zufallsgrößen X und X^n unkorrelliert bzw. korrelliert (begründen!)? Berechnen Sie $C(X, X)$ und $C(X, X^2)$.

2. Es sei die Zufallsgröße X exponentiell verteilt mit dem Parameter $\alpha > 0$. Wie sieht die Verteilungsdichte der Zufallsgröße X^2 aus (begründen!)?

3. Es sei der stetige Zufallsvektor (X, Y) gegeben durch die Dichte:

$$f_{(X,Y)}(x, y) = \begin{cases} c \cdot (1 - xy^3) \text{ für } (x, y) \in [-1, 1] \times [-1, 1] \\ 0 \text{ sonst} \end{cases}$$

Berechnen Sie die Zahl c und die Kovarianz $C(X, Y)$.

4. Ein Laserstrahl werde auf eine ebene Fläche gelenkt mit den kartesischen Koordinaten (x, y). Die Koordinaten des Auftreffpunktes $P = (x, y)$ seien zufällig und gleichverteilt im Kreis $K = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2; x^2 + y^2 \leq 1\}$. Der Zufallsvektor (X, Y), der die Koordinaten der Auftreffpunkte als Werte annimmt, hat also die Verteilungsdichte
$f_{X,Y}(x, y) = 1/\pi$ für $(x, y) \in K$ und $f_{X,Y}(x, y) = 0$ für $(x, y) \notin K$.
a) Bestimmen Sie die Verteilungsdichten der Zufallsgrößen X, Y und $R = (X^2 + Y^2)^{1/2}$.
b) Sind die ZG X und Y stochastisch unabhängig?

5. Es seien X und Y stochastisch unabhängige stetige Zufallsgrößen, die auf dem Intervall $[0, 1]$ gleichmäßig verteilt sind. Berechnen Sie die Verteilungsdichte der Zufallsgröße $X + Y$.

6. Die (x, y) - Ebene sei unterteilt in Quadrate (Felder) gleicher Länge, nummeriert durch Paare ganzer Zahlen $\mathbf{Z}^2$. Eine Figur befinde sich in einem der Felder. Sie kann sich in eines der 8 Nachbarfelder begeben bzw. im Feld bleiben mit den Wahrscheinlichkeiten gegeben durch die folgende Verteilungstabelle (X, Y ZG für x-, y- Richtung)

$Y \backslash X$	-1	0	1
-1	1/12	1/6	1/12
0	1/12	1/6	1/12
1	1/12	1/6	1/12

Die Figur befinde sich zu Beginn im Feld $(0, 0)$ und beginnt eine Irrfahrt durch N - Felder der Ebene in N - Schritten.
Schreiben Sie ein Programm, welches diesen zufälligen Vorgang modelliert und die N - Orte auflistet in der Reihenfolge der Bewegungen bzw. graphisch darstellt (für $N = 100$).